

令和 7 年度大学院春入学 8 月試験

未来ロボティクス専攻

論 述 試 験

【60 分】

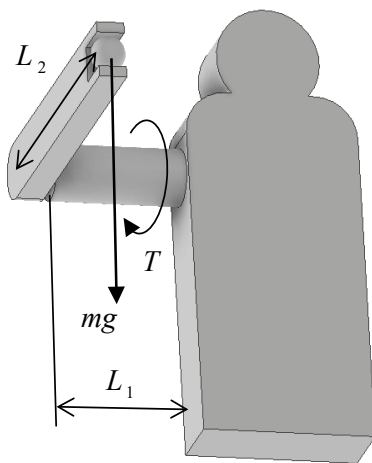
〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないでください。
2. この問題冊子には論述試験の問題が記載されています。万一、落丁・乱丁があった場合は、手をあげて申し出てください。
3. 黒鉛筆、シャープペンシル、消しゴム、鉛筆けずり、時計、眼鏡、受験票以外は机上に置かないでください。
4. 監督者の指示に従い、解答用紙に受験番号・氏名を記入してください。
5. 試験終了の合図で解答を終了し、監督者の指示があるまで席を立たないでください。また問題冊子は持ち帰ってください。
6. 解答用紙は最大 2 枚まで提出できます（1 枚でも構いません）。2 枚提出する場合は解答用紙の右上に 1/2、2/2 の番号を記入してください。

以下の A・B・C から 1 題を選択し，解答せよ．

A. 質量 m の物体を持ち上げるロボットの上腕の仕様を以下の視点から議論せよ．なお，上腕は断面が円形の片持ち梁としてモデル化し，ヤング率などの係数，及び変数は自由に設定してよい．

- (1) せん断力，曲げモーメントを求めよ．
- (2) 断面二次モーメントを計算し，たわみ角，たわみ量を求めよ．
- (3) トルクを計算し，らせん角，最大ねじり角を求めよ．
- (4) 手先精度，安全性に関して考察せよ．



B. 次の状態方程式で表現される動的システムについて以下の問いに答えよ．ただし α , β , γ は任意の実数， $u(t) \in \mathbf{R}^1$ は入力， $y(t) \in \mathbf{R}^1$ は出力である．

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t) \\ y(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

ここで

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (1 \quad \gamma)$$

とする．

- (1) $\alpha = 1$ のとき，このシステムの状態遷移行列 e^{At} を求めよ．
- (2) このシステムが漸近安定となるために α が満たすべき条件を述べよ．
- (3) この動的システムが漸近安定ではないとき，システムを安定化させるための手法とその構成法に関して具体的に説明をせよ．

C.

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

とすると,

$$4 \int_0^1 f(x) dx$$

を解析的に求めた値と、数値的に求めた値の差について説明しなさい。数値的に求める方法として(1) 区分求積法、(2) 台形近似による求積法、(3) シンプソンの公式、の3つを用い、積分区間を8分割として解析解との差について議論しなさい。なお、数値的に求める際には以下の表に示す近似値を使ってよい。

x	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000
$f(x)$	1.000	0.992	0.968	0.927	0.866	0.781	0.661	0.484	0.000

令和 7 年度大学院春入学 8 月試験

未来ロボティクス専攻 論述試験 解答例

A.

解答：

(1) 図 1 に示すように右肩を固定端として座標系を設定し, 肘に下向きに荷重 mg がかけると仮定する.

．せん断力 F は, 集中荷重であるので x の位置に依存せず

$$F(x) = mg$$

．曲げモーメント M は, 先端集中荷重であるので, x に対し,

$$M(x) = mg(L_1 - x)$$

となる．せん断力線図, 曲げモーメント線図を描くと以下のようなになる．

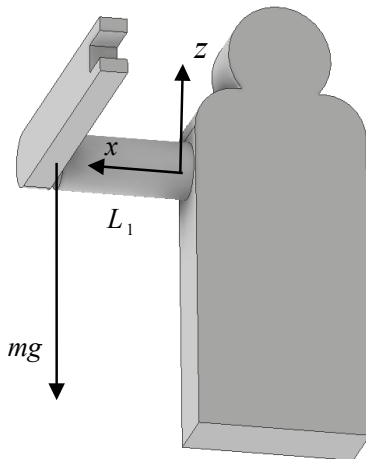


図 1 座標系の定義

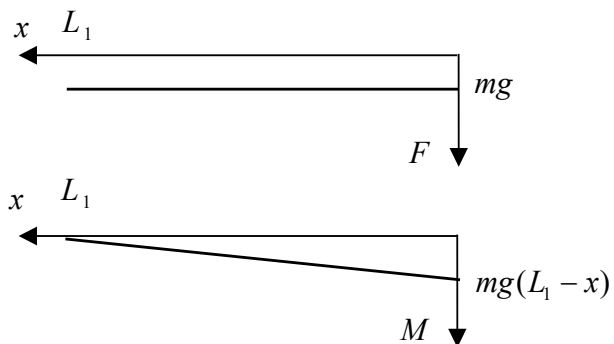


図 2 せん断力線図 (上) と曲げモーメント線図 (下)

(2) 上腕の断面形状を半径 r の円形として中実にすると、断面二次モーメントは、

$$I = \frac{\pi r^4}{4}$$

となる．

たわみ角 θ は、 E をヤング率として、 $x=0$ において $\theta_0=0$ から、

$$\theta(x) = \int_0^x \frac{M}{EI} dX = \frac{mg}{EI} (L_1 x - \frac{1}{2} x^2)$$

となるので、先端（肘）のたわみ角は以下となる．

$$\theta(L_1) = \frac{mg}{2EI} L_1^2 = \frac{2mg}{E\pi r^4} L_1^2$$

たわみ量は、

$$z(L_1) = \int_0^{L_1} \theta dx = \frac{mg}{3EI} L_1^3 = \frac{4}{3} \frac{mg}{\pi r^4 E} L_1^3$$

なお、これ以外の要因でたわむ状況を設定してもよい．

(3) トルク T は、

$$T = L_2 mg$$

となる．上腕を、図 3（左）のように軸方向を x として左端を原点（肩）と考え、半径 r の軸の半径 ρ の位置におけるらせん角 $\gamma(\rho)$ は、軸表面のらせん角 γ_1 として、

$$\gamma(\rho) = \gamma_1 \frac{\rho}{r}$$

となる．軸方向 x の位置におけるねじり角 $\theta(x)$ は、図 3（左）の右端のねじり角を $\hat{\theta}$ として、

$$\theta(x) = \frac{\hat{\theta}}{L_1} x$$

となる．らせん角とねじり角の関係は、

$$L_1 \gamma_1 = r \hat{\theta}$$

である．一方、軸表面にかかるせん断ひずみ τ_1 は、 G をせん断弾性係数として、

$$\tau_1 = G \gamma_1$$

となる．軸内部の半径方向 ρ の位置では、

$$\tau(\rho) = \frac{\rho}{r} \tau_1 = \frac{\rho}{r} G \gamma_1$$

となる．軸断面内部の全体のせん断応力によるモーメントが，トルク T と釣り合っているので，

$$T = \int_0^r \rho \tau dA = \frac{\pi G \gamma_1}{2} r^3$$

である．よって，らせん角は，

$$\gamma_1 = \frac{2T}{\pi G r^3} = \frac{2L_2 m g}{\pi G r^3}$$

となる．また，ねじり角は，

$$\hat{\theta} = \frac{L_1 \gamma_1}{r} = \frac{2L_1 L_2 m g}{\pi G r^4}$$

となる．

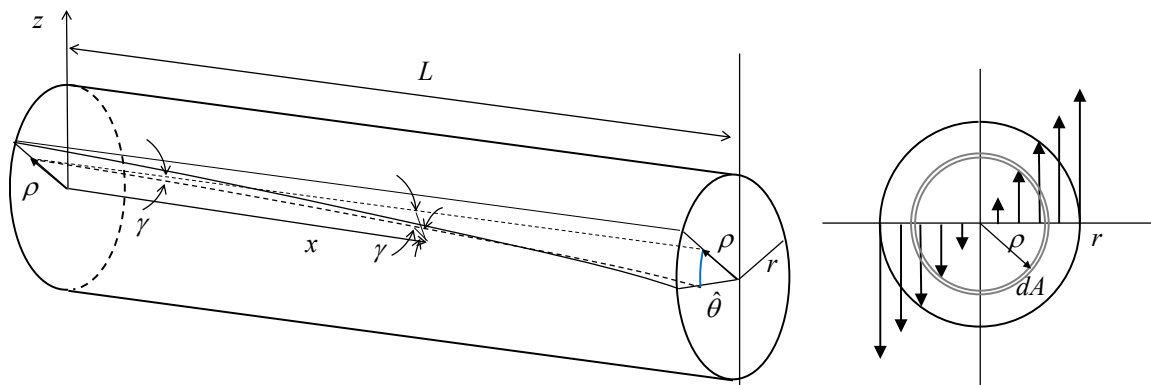


図3 一般的な軸のらせん角とねじり角の関係（左）と軸断面に働くせん断応力（右）

(4)

以下に示すいくつかの問題に対して議論してあればよい．例えば，この姿勢において，

．位置決め精度に関して，肘のたわみ量は，

上腕の長さの3乗で大きくなる．

ヤング率に反比例する．

上腕径の4乗に反比例する．

物体の質量に比例する．

．また，肘から先の前腕の傾きによる位置決め精度を考えるとすれば，誤差は，

上腕の長さに比例する．

前腕の長さに比例する．

せん断弾性係数に反比例する

上腕の径の 4 乗に反比例する.

物体の質量に比例する

. 安全性に関して,

フォン・ミーゼス応力を示し, 材料固有の降伏応力との関係を議論する. 例えば,

安全係数 = 降伏応力 / フォン・ミーゼス応力

等を求めるなどする.

B.

解答：

1)

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1} \left[(sI - A)^{-1} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\begin{pmatrix} s-1 & -1 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 2s + 2} \begin{pmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2 + 1} \begin{pmatrix} (s+1) - 2 & 1 \\ -1 & (s+1) - 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t - 2e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t \\ -e^{-t} \cos t & e^{-t} \cos t - 2e^{-t} \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$2) \operatorname{Re} \left(\begin{pmatrix} s-\alpha & -1 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \right) < 0 \Rightarrow -1 < \alpha$$

3) システム安定化のための制御系構築がなされていればどのような方法でも良い。

代表的な手法として、状態フィードバックによる安定化、直列補償器による安定化、などがあげられる。(いずれの場合も安定条件(極の実部が負)に関して書かれていることが必要)

状態フィードバックによる安定化の記述例：

状態フィードバックによりシステムを安定化させるためには、システムが可制御で無くてはいけない。従って可制御性行列

$U_C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha + \beta \\ \beta & -1 + \beta \end{pmatrix}$ より、 $-1 + \beta - (\alpha\beta + \beta^2) \neq 0$ がシステムが可制御性を持つ条件である。

状態フィードバック係数ベクトルを $\mathbf{f} = (f_1 \quad f_2)$ としたとき、

状態フィードバックを施したあとのシステムの極は

$$\begin{aligned} \det(sI - A + \mathbf{bf}) &= \begin{vmatrix} s - \alpha + f_1 & -1 + f_2 \\ 1 + \beta f_1 & s - 1 + \beta f_2 \end{vmatrix} \\ &= s^2 + (f_1 + \beta f_2 - \alpha - 1)s + (\alpha + 1 - \alpha\beta f_2 - f_1 - f_2 + \beta f_1) \end{aligned}$$

システム安定のためにはこの極の実部が負である必要があるので

$$\operatorname{Re} \left[\frac{-(f_1 + \beta f_2 - \alpha - 1) \pm \sqrt{(f_1 + \beta f_2 - \alpha - 1)^2 - 4(\alpha + 1 - \alpha\beta f_2 - f_1 - f_2 + \beta f_1)}}{2} \right] < 0 \quad \text{を}$$

満たすように状態フィードバックゲインを決めることで、システムを安定化できる。

C.

解答例

解析的な解

$x = \sin \theta$ とおくと、 $dx = \cos \theta d\theta$ より

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 f(x) dx &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \cos \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^2 \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 + 2 \cos 2\theta d\theta \\ &= [2\theta + \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \end{aligned}$$

$f(x)$ は、原点を中心とした半径 1 の円の上部を表すため、その第一象限での積分値（面積）は $\pi/4$ であることから自然に求まる．

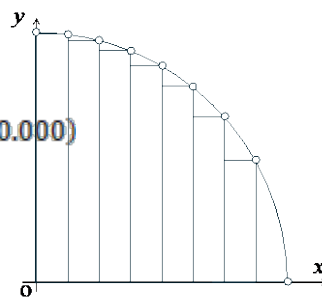
(1) 区分求積法

各領域の x 方向の幅を h ，各領域の右辺の長さを y_i ($i = 1, \dots, 8$)とすると，各長方形の面積 $s_i = hy_i$ であるから，全体の積分値は

$$4 \int_0^1 f(x) dx \approx 4 \sum_{i=1}^8 s_i = 4h \sum_{i=1}^8 y_i$$

で求めることができる．具体的に求めると，

$$\begin{aligned} 4 \int_0^1 f(x) dx &\approx 4h \sum_{i=1}^8 y_i \\ &= 0.5(0.992 + 0.968 + 0.927 + 0.866 + 0.781 + 0.661 + 0.484 + 0.000) \\ &= 0.5 \cdot 5.679 = 2.8395 \end{aligned}$$



である． $\pi (\approx 3.14159)$ と比較すると，大幅に小さい．右の図を見てわかる通り，各領域内での関数の値の変化の影響が差に直接あらわれる．特に最後の領域の面積を 0 に近似している影響が大きい．

なお，各領域の左辺を高さにする場合は 0.5 だけ結果が増加するため，3.3395 になり解析的な解を超える．

(2) 台形公式

各領域を台形とみなすと、その面積は

$$s_i = \frac{h}{2}(y_i + y_{i+1}), \quad i = 0, \dots, 7$$

であるから、全体の積分値は

$$4 \int_0^1 f(x) dx \approx 4 \sum_{i=0}^7 s_i = 4 \frac{h}{2} \sum_{i=0}^7 (y_i + y_{i+1}) = 2h \left[y_0 + 2 \sum_{i=1}^7 y_i + y_8 \right]$$

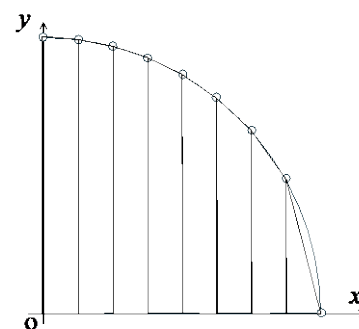
で求めることができる。具体的に求めると、

$$4 \int_0^1 f(x) dx$$

$$\approx 0.25 \times [1.000 + 2 \times (0.992 + 0.968 + 0.927 + 0.866 + 0.791 + 0.661 + 0.484) + 0.000]$$

$$= 0.25 \times [1.000 + 2 \times 5.679] = 0.25 \times 12.358 = 3.0895$$

区分求積法と比較すると、区分的な直線で近似することで区間内の関数値の変化をとらえることができるため、各領域での誤差の減少にともない全体の誤差も改善されているが、最後の領域の誤差が未だ大きい。



(3) シンプソンの公式

右の図のような二次曲線を

$$y = ax^2 + bx + c$$

(a, b, c は係数) で表したとき、

$$\int_{-h}^h ax^2 + bx + c \, dx = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx \right]_{-h}^h = \frac{2a}{3}h^3 + 2ch$$

ここで、

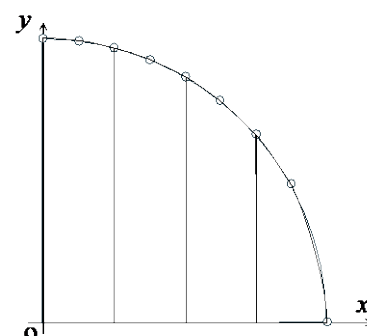
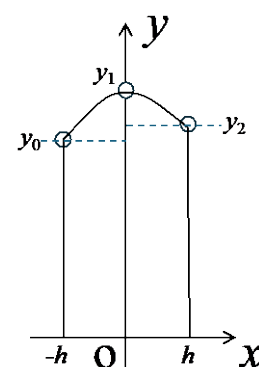
$$y_0 = ah^2 - bh + c$$

$$y_1 = c$$

$$y_2 = ah^2 + bh + c$$

より、 $c = y_1$ で、

$$2ah^2 + 2c = y_0 + y_2$$



$$a = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2}$$

だから,

$$\int_{-h}^h ax^2 + bx + c \, dx = \frac{2h^3}{3} \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2h^2} + 2y_1h$$

$$= \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2)$$

である。したがって、全体の積分値は、

$$4 \int_0^1 f(x) \, dx \approx \frac{4h}{3} \sum_{i=0,2,4,6} (y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})$$

$$= \frac{4h}{3} [y_0 + 4 \times (y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2 \times (y_2 + y_4 + y_6) + y_8]$$

で求めることができる。具体的に求めると、

$$4 \int_0^1 f(x) \, dx$$

$$\approx \frac{1}{6} [1.000 + 4 \times (0.992 + 0.927 + 0.781 + 0.484) + 2 \times (0.968 + 0.866 + 0.661) + 0.000]$$

$$= \frac{1}{6} [1.000 + 4 \times 3.184 + 2 \times 2.495] = \frac{1}{6} [1.000 + 12.736 + 4.990] = \frac{18.726}{6} = 3.121$$

他の求積法と比較すると差が小さい。二次曲線による近似により関数値の変化をより適切にとらえられるためである。