

令和 7 年度大学院春入学 3 月試験

未来ロボティクス専攻

論 述 試 験

【60 分】

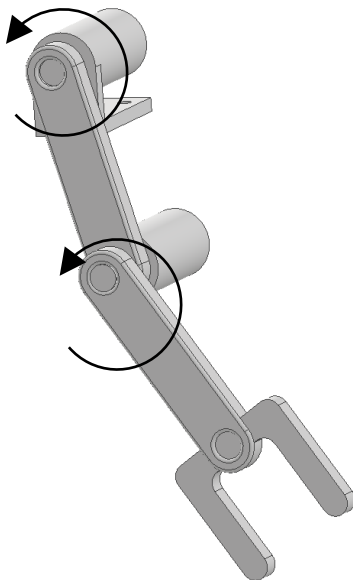
〔注意事項〕

1. 試験開始の合図があるまで、この問題冊子を開かないでください。
2. この問題冊子には論述試験の問題が記載されています。万一、落丁・乱丁があった場合は、手をあげて申し出てください。
3. 黒鉛筆、シャープペンシル、消しゴム、鉛筆けずり、時計、眼鏡、受験票以外は机上に置かないでください。
4. 監督者の指示に従い、解答用紙に受験番号・氏名を記入してください。
5. 試験終了の合図で解答を終了し、監督者の指示があるまで席を立たないでください。また問題冊子は持ち帰ってください。
6. 解答用紙は最大 2 枚まで提出できます（1 枚でも構いません）。2 枚提出する場合は解答用紙の右上に 1/2、2/2 の番号を記入してください。

以下の A・B・C から 1 題を選択し，解答せよ．

A. 図のような，二つの回転関節からなる 2 リンクのマニピュレータで把持物体を遠くまで投げたい．以下の問いに答えよ．なお，パラメータの設定などは自由に行ってよい．

- (1) 手先位置と関節角度の関係を運動学として示せ．
- (2) 手先速度と関節角速度の関係を運動学として示せ．
- (3) 特異姿勢を求め，その例を図示せよ．
- (4) 上記(3)の特異姿勢での可操作性楕円を描け．
- (5) 上記の定式化から，どのように投げると把持物体を遠くまで投げられるか考察せよ．

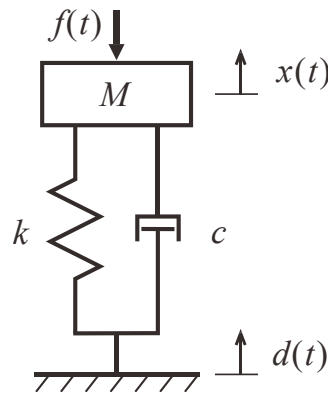


B. 次の関数 $f(x)$ について以下の問いに答えよ．

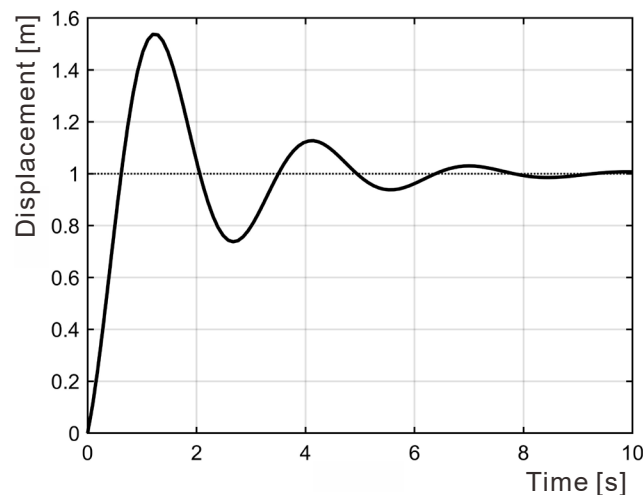
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

- (1) $x > 1$ における $f(x)$ の最小値を解析的に求めよ．
- (2) $x > 1$ における最小値をニュートン法により数値的に求める方法を説明せよ．
- (3) (2)における x の初期値 x_0 の適切な範囲が $x_0 > 2$ であることを示せ．
- (4) (2)で説明した方法により，実際に $f(x)$ の最小値を求めるプログラムを示せ．ただし，C，Python のいずれかのプログラミング言語に準ずる表現で示すこと．

- C. 下の図で示す振動系がある．質量 $M[\text{kg}]$ の質点が，ばねとダンパで並列に連結されて地面の上に固定されている．時間を $t[\text{s}]$ としたとき，質点には $f(t)[\text{N}]$ の外力を加えることができるようになっている．このときの平衡状態からの質点の絶対変位を $x(t)[\text{m}]$ とする．また，地面は強制変位入力 $d(t)[\text{m}]$ を受けるものとする．このとき，以下の問いに答えよ．



- (1) ばね定数を k ，粘性摩擦係数を c とするとき，それぞれの単位を SI 単位系で答えよ．
- (2) 強制変位が $d(t)=0$ ($0 \leq t$) のとき，状態 $\mathbf{x} = (x \ \dot{x})^T$ としてシステムの状態方程式を導出せよ．
- (3) 強制変位が $d(t) (\neq 0)$ のとき，このシステムの運動方程式を導出せよ．
- (4) 制御入力 $f(t)=0$ の状態でステップ状の強制変位入力 $d(t)=1$ ($0 \leq t$) を入力した結果，下のグラフのような絶対変位 $x(t)$ の時間応答がみられた．このような応答になるための条件を述べよ．



- (5) 強制変位が $d(t)=\sin 2t$ のとき， $x(\infty) \rightarrow 0$ とするような制御系を構築したい．そのための制御系設計方法について説明せよ．必要に応じて状態を測定することは可能とする．但しその際には，どのようなセンサ・計測系を用いるのかを説明すること．

令和 7 年度大学院春入学 3 月試験

未来ロボティクス専攻 論述試験 解答例

A.

解答例

例えば，図 1 のように座標系，および変数を定義する．

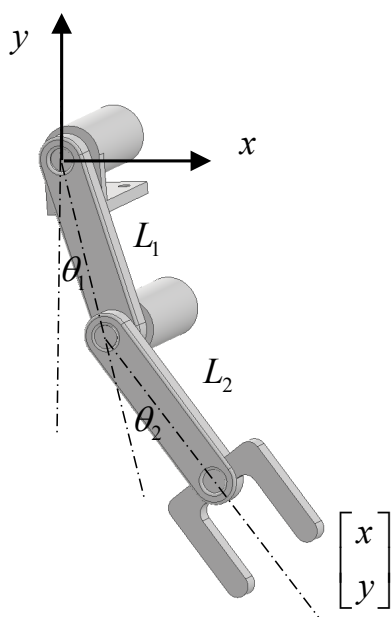


図 1 座標系の定義

(1) 上記の設定で，手先位置と関節角度の関係は以下の通り．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \sin \theta_1 + L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ -L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} L_1 S_1 + L_2 S_{1+2} \\ -L_1 C_1 - L_2 C_{1+2} \end{bmatrix}$$

(2) 速度の関係は、上記を微分して、以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \dot{\theta}_1 C_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) C_{1+2} \\ L_1 \dot{\theta}_1 S_1 + L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) S_{1+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 C_1 + L_2 C_{1+2} & L_2 C_{1+2} \\ L_1 S_1 + L_2 S_{1+2} & L_2 S_{1+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\theta}}$$

(3) 上記より特異姿勢は、

$$\det \mathbf{J} = \begin{vmatrix} L_1 C_1 + L_2 C_{1+2} & L_2 C_{1+2} \\ L_1 S_1 + L_2 S_{1+2} & L_2 S_{1+2} \end{vmatrix} = L_1 L_2 S_2 = 0$$

より、 $\theta_2=0, 180$ [deg]となる．図示すると一例は図 2 の通り．

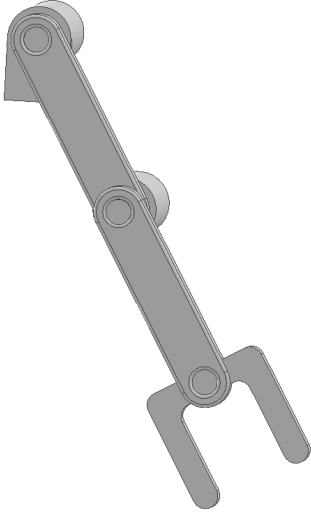


図 2 特異姿勢の例

(4) $\theta_2=0$ の時の ($\theta_2=180$ [deg]でもよいが、遠くまで投げられない) 可操作性は、

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\mathbf{J}^T &= \begin{bmatrix} (L_1 + L_2)C_1 & L_2 C_1 \\ (L_1 + L_2)S_1 & L_2 S_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (L_1 + L_2)C_1 & (L_1 + L_2)S_1 \\ L_2 C_1 & L_2 S_1 \end{bmatrix} = [(L_1 + L_2)^2 + L_2^2] \begin{bmatrix} C_1^2 & C_1 S_1 \\ C_1 S_1 & S_1^2 \end{bmatrix} \\ &\equiv L \begin{bmatrix} C_1^2 & C_1 S_1 \\ C_1 S_1 & S_1^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$|\mathbf{J}\mathbf{J}^T - \lambda \mathbf{I}| = \begin{vmatrix} LC_1^2 - \lambda & LC_1 S_1 \\ LC_1 S_1 & LS_1^2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - L)\lambda$$

となる．よって固有値は、 $\lambda=L, 0$,

となり、 $\lambda=L$ の固有ベクトルは、

$$\mathbf{J}\mathbf{J}^T - L\mathbf{I} = \begin{bmatrix} LC_1^2 - L & LC_1 S_1 \\ LC_1 S_1 & LS_1^2 - L \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} C_1^2 - 1 & C_1 S_1 \\ C_1 S_1 & S_1^2 - 1 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} -S_1^2 & C_1 S_1 \\ C_1 S_1 & -C_1^2 \end{bmatrix}$$

から、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ S_1 \end{bmatrix}$$

が長軸となる． $\lambda = 0$ の固有ベクトルは，

$$JJ^T - 0I = \begin{bmatrix} LC_1^2 & LC_1S_1 \\ LC_1S_1 & LS_1^2 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} C_1^2 & C_1S_1 \\ C_1S_1 & S_1^2 \end{bmatrix}$$

から

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_1 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

が短軸となる．一例を図示すると以下の通り．

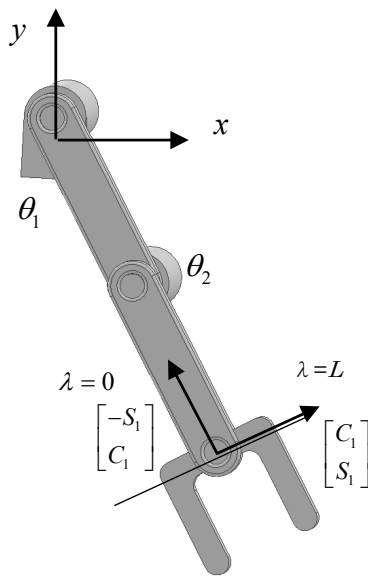


図3 可操作性楕円の一例

(5) 上記(2)より，手先射出速度は，

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= [L_1\dot{\theta}_1C_1 + L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)C_{1+2}]^2 + [L_1\dot{\theta}_1S_1 + L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)S_{1+2}]^2 \\ &= (L_1\dot{\theta}_1)^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)(C_1C_{1+2} + S_1S_{1+2}) + (L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2))^2 \\ &= (L_1\dot{\theta}_1)^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)C_2 + (L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2))^2 \\ &= (L_1\dot{\theta}_1)^2 + 2L_1L_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)C_2 + (L_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2))^2 \end{aligned}$$

で表すことができ， $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 > 0$, $C_2=1$ のとき，つまり $\theta_2 = 0$ の姿勢のとき最大値をとれる．よって，この特異姿勢で投げるのが最も射出速度が大きい．

仮に 45 度の角度 ($\theta_1=\pi/4$, $\theta_2=0$) で投げる場合，手先速度 $V (>0)$ は，

$$V(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = |(L_1 + L_2)\dot{\theta}_1 + L_2\dot{\theta}_2|$$

となる．モータが独立しており，モータ同士の関係に条件がないなら，それぞれのモータの同方向の最大角速度が最も遠くに投げられることになる．可操作性の一般的な条件を考慮すれば，

$$\max V(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) \text{ subject to } \dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 \leq 1$$

を求める問題となる．これ以外のモータ間の関係式を条件にしてもよい．

また，各関節の角速度だけでなく，それぞれのリンク長さに基づいて議論を展開してもよい．さらには，上記 45 度の角度だけでなく，把持物体のリリースポイントやその後の空気抵抗などの外力を考慮した議論を展開してもよい．

B.

解答例

(1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-3)(x-1)$ より, $f(x)$ は $x=1$ と $x=3$ で極値を持つ. $f''(x) = 6x - 12$ より, $f''(3) = 6 > 0$ だから $x=3$ における極値は極小値であり, $x > 1$ においては他に極値を持たないことから $f(x)$ は $x=3$ のときに最小値を与える. よって, $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$ が最小値である.

(2) ニュートン法により以下のようにして求めることができる.

1. 初期値 x_0 を適当な値 (例えば 5) に決める.
2. $i \leftarrow 1$ とする
3. 以下の更新式によって x_i から x_{i+1} を求める.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

4. $i \leftarrow i + 1$ とする
5. $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon$ (ε は 10^{-6} などの小さな正数) であるとき, $f(x_i)$ を解とする. そうでなければ 3. に戻り繰り返し処理をする.

(3) $f''(2) = 0$ だからニュートン法の更新式の際, 0 による除算が発生するため $x_0 = 2$ は適切でない. また, $x_0 < 2$ においては, $f'(x) = 0$ の根として $x=3$ よりも近い $x=1$ に収束する可能性が高くなる. そのため, 初期値は $x_0 > 2$ で与えるべきである.

なお, $x_0 = 2$ 付近においては, 更新式の分母 ($f''(x_i)$) が小さな値になり, 更新が不安定になるため, 2 よりも十分大きな値とすることが好ましい.

C.

解答

1) ばね定数：N/m ， 粘性摩擦係数： N s/m

$$2) \dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{c}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{pmatrix} f$$

$$3) M\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{d}) + k(x - d) = f$$

4) グラフの概形より，応答は不足減衰（減衰振動）であることが読み取れる．その周期，振幅よりシステムのパラメータ値を導出することは可能であるが，解答例として，減衰振動となるための条件を挙げる．

応答が減衰振動となるためのシステムのパラメータ条件としては，システムの実数根が虚数であることがあげられる．このことから，2)の特性方程式の根が虚数，即ち $c^2 - 4kM < 0$ を満たせば良い．

5) いくつか考えられる外乱を推定するための方法およびそれを用いた制御系設計法について記述されていれば良い．例えば，外乱オブザーバなどで推定する方法，外乱が強制変位で既知の場合

合には，外乱の伝達関数と同じ極を有するコントローラ（今回は $\frac{2}{s^2 + 4}$ ）を入れる，などが挙げ

られる．レーザ距離センサや直動型ポテンシオメータなどで状態 $\mathbf{x}$ を直接計測することにより制御する場合には，現実にはセンサの伝達関数を考慮する必要があるため，それを含んだ制御系（例えば PID 制御系など）を構築することは，容易ではない．